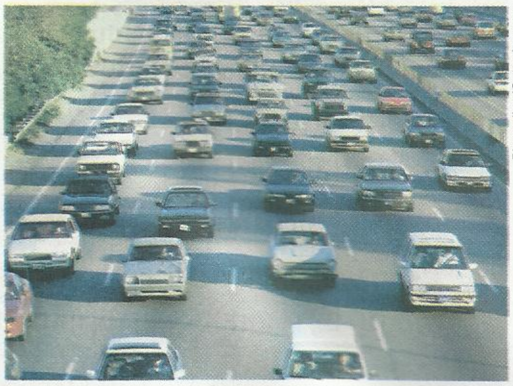
Função composta

Para determinar a distância percorrida por um automóvel em certa viagem, pode-se utilizar a função $z=80t$, sendo z a distância percorrida (em quilômetros) e t o tempo de percurso (em horas). Esse automóvel consome, em média, 0,1 L de combustível por quilômetro percorrido. Dessa forma, podemos escrever a função $y=0{,}1z$ para representar o consumo y de combustível (em litros) em função da distância z percorrida.



Photodisc/Getty Images

Utilizando essas funções, podemos determinar o consumo de combustível após 1,5h de percurso da seguinte maneira:

- distância percorrida em 1,5h: $z=80\cdot1{,}5=120\rightarrow120$ km
- consumo de combustível em 120 km: $y=0{,}1\cdot120=12\rightarrow12$ L

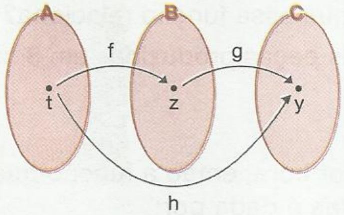
Também é possível escrever uma função que determine o consumo de combustível y em função do tempo t de viagem. Para isso, fazemos uma composição entre as funções y e z.

$$y=0{,}1\underbrace{z}_{80t}\Rightarrow y=0{,}1\cdot80t\Rightarrow y=8t$$

Utilizando $y=8t$, determinamos o consumo de combustível após 1,5h da seguinte maneira:

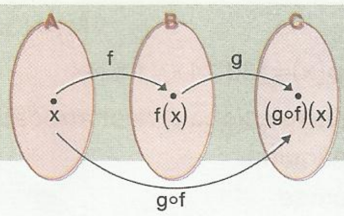
$$y=8\cdot1{,}5=12\rightarrow12\text{ L}$$

Considerando $f(t)=z=80t$, $g(z)=y=0{,}1z$ e $h(t)=y=8t$, temos o seguinte diagrama:



Dizemos que a função h, nesse caso, é a função composta de g com f. Essa função composta pode ser indicada por $(g\circ f)(x)$ ou $g(f(x))$ (lê-se "g composta com f").

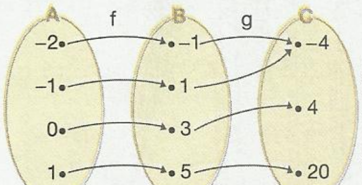
Dadas as funções $f:A\rightarrow B$ e $g:B\rightarrow C$, denominamos função composta de g com f a função $g\circ f:A\rightarrow C$ definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.



Ilustrações: Acervo da editora

Exemplo

Dada a função f de A em B definida por $f(x)=2x+3$ e g de B em C definida por $g(x)=x^2-5$, com $A=\{-2,-1,0,1\}$, $B=\{-1,1,3,5\}$ e $C=\{-4,4,20\}$, temos:



Acervo da editora

- $\begin{cases}f(-2)=-1\\ g(-1)=-4\end{cases}\Rightarrow g(f(-2))=g(-1)=-4$
- $\begin{cases}f(0)=3\\ g(3)=4\end{cases}\Rightarrow g(f(0))=g(3)=4$
- $\begin{cases}f(-1)=1\\ g(1)=-4\end{cases}\Rightarrow g(f(-1))=g(1)=-4$
- $\begin{cases}f(1)=5\\ g(5)=20\end{cases}\Rightarrow g(f(1))=g(5)=20$

De maneira geral, temos:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(f(x))^2-5=(2x+3)^2-5=4x^2+12x+4$$

Utilizando $(g\circ f)(x)$:

- $(g\circ f)(-2)=4\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+4=16-24+4=-4$
- $(g\circ f)(0)=4\cdot0^2+12\cdot0+4=0+0+4=4$
- $(g\circ f)(-1)=4\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)+4=4-12+4=-4$
- $(g\circ f)(1)=4\cdot1^2+12\cdot1+4=4+12+4=20$

50 Considerando a função $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, calcule:

a) $f(5)$ b) $f(f(5))$ c) $f(f(f(5)))$

51 Dadas as funções $f(x)=5x-8$, $g(x)=x^2+4x$ e $h(x)=\dfrac{2}{x-3}$, determine:

a) $f(g(x))$ d) $h(f(x))$ g) $g(g(x))$

b) $h(g(x))$ e) $g(f(x))$ h) $h(h(x))$

c) $f(h(x))$ f) $f(f(x))$

52 Em uma fábrica de roupas, o custo para a produção de camisas é calculado a partir de um valor fixo de R\$ 480,00 mais R\$ 30,00 por unidade produzida. Nessa fábrica são produzidos lotes de, no máximo, 1 000 camisas, sendo vendido cada lote com 30% de lucro sobre o valor de custo.

Acervo da editora

a) Escreva uma função:

- *c*, que relacione o custo de produção e a quantidade *x* de peças produzidas;
- *v*, que relacione o valor de venda de um lote e o custo *c* da produção.

b) Qual é o custo para a produção de um lote com 600 camisas? Por quantos reais será vendido esse lote?

c) Determine a função $v(c(x))$. O que representa essa função?

d) Qual é o valor de venda de um lote com:

- 500 camisas?
- 835 camisas?

53 Em relação às funções $f(x)=x^2-25$ e $g(x)=\sqrt{x}$, é correto afirmar que:

a) $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ d) $(f\circ g)(x)=x-5$

b) $(g\circ g)(x)=(f\circ f)(x)$ e) $(g\circ f)(-6)\geq \pi$

c) $(f\circ g)(x)=x-25$ f) $(g\circ f)(13)\notin \mathbb{R}$

54 Considerando as funções *f* e *g* apresentadas na atividade anterior, determine o domínio e a imagem de $(f\circ g)(x)$.

55 Se $f(x-6)=\sqrt{x}+3$, qual o valor de $f(-2)$?

56 Para cada item, esboce o gráfico da função $f(g(x))$.

a) $f(x)=\dfrac{x}{2}+1$ e $g(x)=4x+6$

b) $f(x)=3x^2-10$ e $g(x)=2\sqrt{x}$

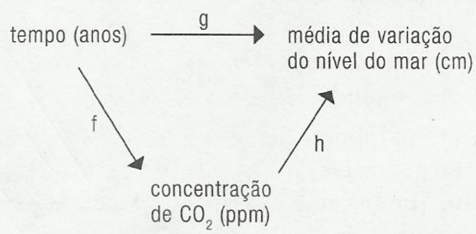
c) $f(x)=x^2-3x$ e $g(x)=5-x$

57 Desafio

Dadas as funções $f^{-1}(x)=\dfrac{x+6}{3}$ e $g(x)=\dfrac{x^2}{4}+5x$, determine $(g\circ f)(4)$.

58 Considerando as funções $f(x)=4x+m$ e $g(x)=2x-6$, determine *m* para que $(f\circ g)=(g\circ f)$.

59 (Vunesp – SP) Seja *x* o número de anos decorridos a partir de 1960 $(x=0)$. A função $y=f(x)=x+320$ fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em ppm (partes por milhão) em função de *x*. A média de variação do nível do mar, em cm, em função de *x*, é dada aproximadamente pela função $g(x)=\dfrac{1}{5}x$. Seja *h* a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2. No diagrama seguinte, estão representadas as funções *f*, *g* e *h*.



Determine a expressão de *h* em função de *y* e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm.

Fabio Colombini

Indústria poluindo o ar ao emitir CO_2 na atmosfera, Cubatão (SP), em 2008.

Resolução das questões 50 e 51

50 (a) $f(5) = \frac{x+1}{x} = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$

(b) $f(f(x)) = \frac{x+1}{x} = \frac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{x+1+x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} =$

$= \frac{(2x+1)}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{(x+1)} = \frac{2x+1}{(x+1)}$, logo $f(f(5))$ é

$f(f(5)) = \frac{2(5)+1}{5+1} = \frac{10+1}{6} = \frac{11}{6}$

(c) $f(f(f(5))) = ?$ logo $f(f(x)) = \frac{2x+1}{(x+1)}$ e $f(x) = \frac{x+1}{x}$

$f(f(f(x))) = \frac{x+1}{x} = \frac{\frac{2x+1}{x+1}+1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{\frac{2x+1+x+1}{(x+1)}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{\frac{3x+2}{(x+1)}}{\frac{2x+1}{(x+1)}} =$

$\frac{3x+2}{\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}$, logo $f(f(f(5)))$ é:

$f(f(f(5))) = \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{3(5)+2}{2(5)+1} = \frac{15+2}{10+1} = \frac{17}{11}$

51 Dado as funções $f(x) = 5x-8$, $g(x) = x^2+4x$ e $h(x) = \frac{2}{x-3}$, determine:

(a) $f(g(x)) = 5x-8 = 5(x^2+4x)-8 = 5x^2+20x-8$

(b) $h(g(x)) = \frac{2}{x-3} = \frac{2}{(x^2+4x)-3} = \frac{2}{x^2+4x-3}$

(c) $f(h(x)) = 5x-8 = 5\left(\frac{2}{x-3}\right)-8 = \frac{10}{x-3}-8$ ou

$\frac{10}{x-3}-8 = \frac{10-8(x-3)}{x-3} = \frac{10-8x-24}{x-3} = \frac{-8x-14}{x-3} = \frac{-2(4x-7)}{x-3}$

(d) $h(f(x)) = \frac{2}{x-3} = \frac{2}{(5x-8)-3} = \frac{2}{5x-8-3} = \frac{2}{5x-11}$

(e) $g(f(x)) = x^2+4x = (5x-8)^2 + 4(5x-8) =$

$= (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 8 + 8^2 + 20x - 32 =$

$= 25x^2 - 80x + 64 + 20x - 32 =$

$= 25x^2 - 60x + 32$

(f) $f(f(x)) = 5x-8 = 5(5x-8) - 8 = 25x - 40 - 8 = 25x - 48$

(g) $g(g(x)) = x^2-4x = (x^2-4x)^2 - 4(x^2-4x) =$

$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4x + (4x)^2 - 4x^2 + 16x =$

$= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 4x^2 + 16x =$

$= x^4 - 8x^3 + 20x^2 + 16x$

(h) $h(h(x)) = \frac{2}{x-3} = \frac{2}{\frac{2}{x-3} - 3} = \frac{2}{\frac{2-3(x-3)}{(x-3)}} = \frac{2}{\frac{2-3x+9}{(x-3)}} =$

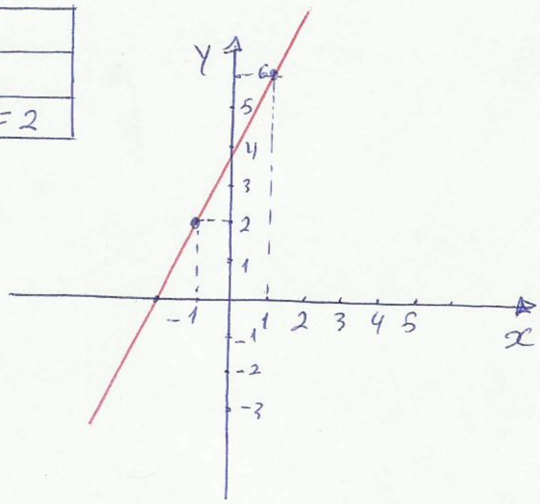
$= \frac{2 \cdot (x-3)}{2-3x+9} = \frac{2x-6}{11-3x}$

(56) Para cada item esboce o gráfico das funções $f(g(x))$

a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $g(x) = 4x + 6$

$$f(g(x)) = \frac{x}{2} + 1 = \frac{4x+6}{2} + 1 = \frac{4x+6+2}{2} = \frac{4x+8}{2} = 2x+4$$

x	$f(g(x)) = 2x+4$
1	$= 2(1)+4 = 6$
-1	$= 2(-1)+4 = -2+4 = 2$



b) $f(x) = 3x^2 - 10$ e $g(x) = 2\sqrt{x}$

$$f(g(x)) = 3x^2 - 10 = 3(2\sqrt{x})^2 - 10 = 3(4 \cdot x) - 10 =$$

$$f(g(x)) = 12x - 10$$

x	$f(g(x)) = 12x - 10$
-1	$= 12(-1) - 10 = -22$
+1	$= 12(1) - 10 = 2$
2	$= 12(2) - 10 = 14$